

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La calculatrice est autorisée

Consignes à suivre :

- Numérotter les pages. Numérotter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la rédaction & soigner la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.

I - Chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

Formulaire : Développement de Taylor d'une fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction (Ox) . En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_0 \left[1 - e^{-a(x-x_0)} \right]^2$$

avec V_0 , a et x_0 des constantes réelles positives.

1) Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre x_{eq} .

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre. On pose :

$$x(t) = x_{eq} + \varepsilon(t) \quad \text{avec : } |\varepsilon(t)| \ll 1/a$$

2) En développant l'énergie potentielle $V(x)$ au second ordre en ε , montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_0 et de a .

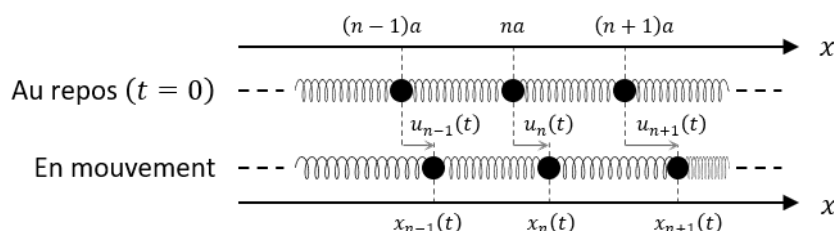
3) Si on appliquait cette force à une particule de masse m et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations ω_0 de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps $\varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0) = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.

4) Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide a . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note m cette masse des masselottes entre les ressorts, $x_n(t)$ l'abscisse de la $n^{\text{ième}}$ masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre.

On représente sur le schéma ci-dessous les notations pour les masses n° $n-1$, n et $n+1$.



Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses. Initialement, à $t = 0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre est égale à la longueur à vide a .

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n = 0$ à $t = 0$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la $n^{\text{ième}}$ masse $x_n(0)$ en fonction de n et de a . En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x_n(t)$, n et de a .

6) Établir que l'équation du mouvement de la $n^{\text{ième}}$ masse, se met sous la forme :

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$$

avec α , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel q strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$\underline{u}_n(t) = U_0 e^{i(\omega t - qna)}$$

avec $i^2 = -1$, ω et U_0 strictement positifs.

7) Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_0 et ω ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une $p^{\text{ième}}$ masse (avec $p > n$) telle que : $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t)$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

8) Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de q . Que représente finalement q ?

1.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes. On admet que l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse m , distants de x , sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6} \quad \text{avec : } A, B \in \mathbb{R}^{+,*}$$

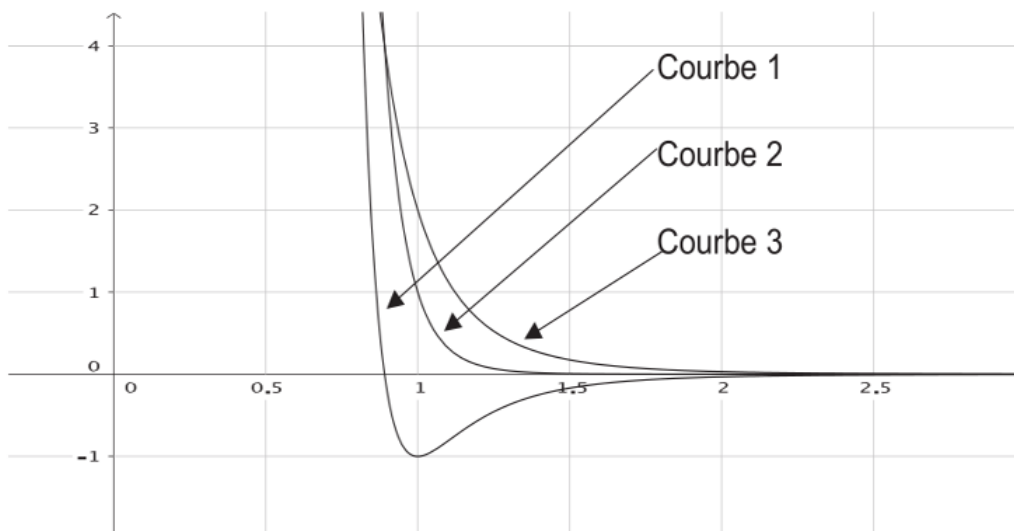
9) Les deux termes du potentiel de Lennard-Jones correspondent-elles à des interactions attractives ou répulsives ? À quelles interactions correspondent-elles ?

10) En notant a la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que $V(x)$ se met sous la forme :

$$V(x) = V_0 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right]$$

où la profondeur du puits de potentiel V_0 est à exprimer en fonction de B et de a .

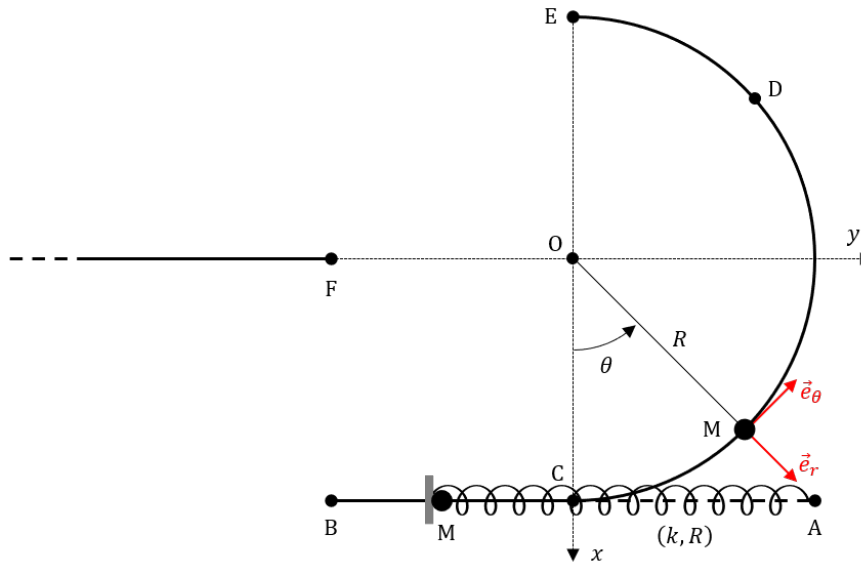
11) Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes : $\frac{V(x)}{V_0}$; $\left(\frac{a}{x} \right)^{12}$ et $2 \left(\frac{a}{x} \right)^6$. Identifier ces courbes.



12) Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant a , la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction de V_0 et de a .

II - Un jeu d'enfant

On considère le jeu d'enfant suivant.



Une bille (point M de masse m supposée ponctuelle) circule sur une piste $BCFE$. Cette piste est constituée : d'une partie rectiligne BC de longueur R , d'un demi-cercle CE de rayon R et de centre O , et d'une seconde partie rectiligne commençant au point F (situé au dessus du point B , à gauche du point O).

Un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide R , relié d'un côté à un point fixe A (distance $CA = R$) et de l'autre à une plaque mobile.

Un enfant tire la plaque jusqu'au point B et place la bille M contre la plaque. Il lâche la plaque sans vitesse initiale, le ressort se contracte alors, propulsant la bille. Le contact entre la bille et la plaque est rompu au point C : la bille s'engage dans la piste circulaire et le ressort est arrêté par une cale non représentée sur le schéma.

On néglige dans l'exercice toute source de dissipation d'énergie. Tous les résultats sont à exprimer en fonction de k , R , m et g .

13) Déterminer l'expression de la vitesse v_C de la bille au point C .

On étudie le mouvement dans la piste circulaire.

14) Déterminer, à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique de la bille, une relation reliant ω (vitesse angulaire) et θ .

15) En déduire l'expression de la réaction normale de la piste en fonction de θ .

16) Déterminer l'angle θ_D du point D , point où la bille quitte le guide. En déduire une condition portant sur k pour que le point matériel parvienne au sommet E de la piste. On note k_0 le cas limite.

On suppose la suite que $k = k_0$. On étudie le mouvement après la point E .

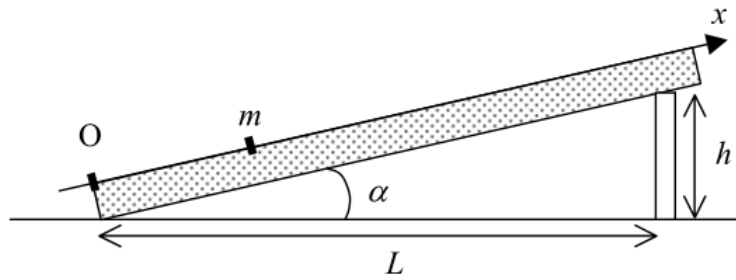
17) Déterminer l'équation du mouvement lorsque de la chute libre.

18) Le jouet peut-il tomber entre F et O ?

19) On suppose de plus qu'il conserve après l'atterrissage sur le plan horizontal la composante horizontale du vecteur vitesse qu'il avait à l'instant de l'atterrissage. Déterminer l'expression de sa vitesse sur le plan horizontal en fonction, entre autres, de v_0 .

III - Étude de la force de répulsion magnétique par un aimant

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Oy), incliné par une cale de hauteur h d'un angle $\alpha \ll 1$ rad (on fera l'approximation des petits angles dans tout l'exercice) par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-après. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O , et un autre aimant, de masse m , est fixé sur un palet mobile sans frottement.



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force notée $\vec{F}$, prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

20) Faire un bilan des forces à l'équilibre sur un schéma.

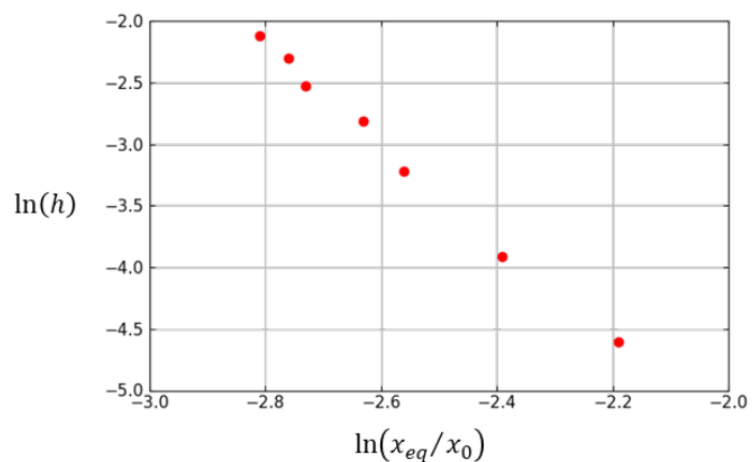
Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme :

$$\vec{F} = k \left(\frac{x_0}{x} \right)^n \vec{u}_x \quad \text{avec : } x_0 > 0, \quad k > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}$$

21) Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_{eq} en fonction de x_0 , k , m , g , L , h et n dans le cas des petits angles.

22) On mesure x_{eq} pour différentes hauteurs de cales, puis on représente $\ln(h)$ en fonction de $\ln\left(\frac{x_{eq}}{x_0}\right)$. En prenant $x_0 = 1$ m, déduire des mesures ainsi représentées ci-dessous les valeurs de n et de k . On donne : $L = 120$ cm, $m = 189$ g.

$\ln\left(\frac{x_{eq}}{x_0}\right)$	$\ln(h)$
-2,19	-4,61
-2,39	-3,91
-2,56	-3,22
-2,63	-2,81
-2,73	-2,53
-2,76	-2,30
-2,81	-2,12



On souhaite à présent étudier le mouvement de l'aimant lorsqu'il se situe proche de sa position d'équilibre.

23) Justifier qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente, notée K .

24) Toutes choses égales par ailleurs, montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera.

----- Fin de la partie III -----